Домашна работа 2 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

14 Ноември 2021

4 Въпрос Да се намери рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & q & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на комплексните параметри $p, q \in \mathbb{C}$

Решение: Умножаваме втори ред по -1 и събираме с първи. Събираме трети ред с четвърти. Разменяме първи ред с втори, втори с трети и трети с четвърти. Получаваме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & q+1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & p-2 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -1 и събираме с втори.
Получения втори ред делим на 2 и събираме с първи и четвърти.
Умножаваме четвърти ред по -2 и събраме с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & q+1 & -2p+1 & 0 \\ 0 & 0 & p-\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

I. Случай: $q+1=0$ и $-2p+1=0$ или $q+1 \neq 0$ и $-2p+1 \neq 0$

Ако и двете са нули, трети ред се занулява и получаваме Гаус-Жорданов вид с три линейно независими уравнения.

Ако и двете не са нули, ще можем да занулим втори ред чрез трети (или обратното). Отново стигаме до Гаус-Жорданов вид с три линейно независими уравнения.

$\implies \operatorname{rk}(A) = 3$

II. Случай: $q+1 \neq 0$ и $-2p+1=0$ или $q+1=0$ и $-2p+1 \neq 0$

Делим трети ред на ненулевата стойност и чрез този ред зануляваме една от ненулевите колони във втори ред. Поетапно чрез втори, трети и четвърти ред ще занулим втора, трета и четвърта колона на останалите редове.

Стигаме до Гаус-Жорданов вид с четири линейно независими уравнения.

$\implies \operatorname{rk}(A) = 4$

$\implies$ Ако $\left(q=-1 \text{ и } p=\frac{1}{2}\right)$ или $\left(q \neq -1 \text{ и } p \neq \frac{1}{2}\right)$, то рангът $\operatorname{rk}(A)=3$, иначе $\operatorname{rk}(A)=4$